

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ  
О КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ БЕСКОНЕЧНО  
ПРОТЯЖЁННОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С КРУГОВЫМ  
ВЯЗКОУПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ СРЕДСТВАМИ  
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ**

**Шавырин Д.А.**

Кафедра вычислительной математики

---

*Поступила в редакцию 03.03.2013, после переработки 27.03.2013.*

---

Сформулирован метод и разработан алгоритм аналитического решения плоской задачи теории вязкоупругости о напряжённо-деформированном состоянии в бесконечно протяжённом теле с круговым вязкоупругим включением, когда на бесконечности заданы напряжения. Алгоритм программно реализован с использованием средств компьютерной алгебры. При решении используются комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили, которые определяются в виде отрезков рядов Лорана. На основе полученного решения проведён анализ распределения напряжений и изменения формы включения в различные моменты времени.

The method of the analytical solution is formulated and the algorithm is developed for a specific plane problem of the theory of viscoelasticity. This is the problem of the stress-strain state in infinitely extended body with circular viscoelastic inclusion when the stresses at infinity are fixed. The algorithm is implemented using software tools of computer algebra. Solution uses complex Kolosov-Muskhelishvili potentials, which are defined as pieces of Laurent series. The stress distribution and the form of inclusion in different times are analyzed on the basis of the obtained solution.

**Ключевые слова:** теория вязкоупругости, плоская задача, вязкоупругое включение, аналитическое решение, комплексные потенциалы, компьютерная алгебра.

**Keywords:** theory of viscoelasticity, plane problem, viscoelastic inclusion, analytical solution, complex potentials, computer algebra.

## **Введение**

Актуальным направлением исследований в механике деформируемого твёрдого тела являются задачи расчёта вязкоупругих конструкций [1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12]. В настоящей статье предлагается подход к решению модельных плоских задач теории вязкоупругости, на основе которого исследуется НДС вблизи вязкоупругого включения и внутри него с использованием аналитических методов. Решение

строится на основе обобщения методики решения плоских задач с использованием системы компьютерной алгебры для упругих материалов [5] на случай вязкоупругости. Задача формулируется и решается в рамках линейной теории вязкоупругости при малых деформациях.

### 1. Постановка задачи

Исследуется напряжённо-деформированное состояние бесконечно протяжённого вязкоупругого тела (матрицы), в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами, когда на бесконечности заданы напряжения. Эта задача решается в квазистатической постановке, т. е. без учёта динамических эффектов. В такой постановке задача является обобщением первой основной граничной задачи статики упругого тела [7] на случай вязкоупругих тел. Тело находится в условиях плоской деформации. Предполагается, что на границе между включением и матрицей выполнены условия идеального контакта: условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных напряжений. Требуется решить задачу о квазистатическом деформировании тела при заданных напряжениях на бесконечности. Считается, что напряжения остаются ограниченными при стремлении к бесконечности. При таком условии решение задачи будет единственным. Рассматривается частный случай, когда к телу прикладываются одноосные растягивающие нагрузки на бесконечности.

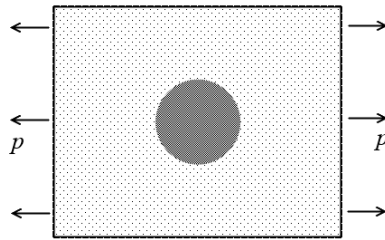


Рис. 1: Схема нагружения тела с включением

В качестве математической модели вязкоупругой среды используется обобщённая модель Фойгта [2, 12]. Здесь и в дальнейшем индексом  $M$  отмечаются величины, относящиеся к матрице, а индексом  $B$  – к включению. Система координат выбрана таким образом, чтобы направление нагружения совпало с осью  $x$ , а начало координат совпало с центром включения.

Уравнение равновесия имеет вид

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \vec{f} = 0. \quad (1)$$

Закон вязкоупругости записывается в форме [9]:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(t - \tau) I_1 \left( \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \right) I d\tau + 2 \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

здесь ядра релаксации  $\lambda$  – объёмное и  $G$  – сдвиговое

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{-\alpha t}, \quad G(t) = G_0 + G_1 e^{-\beta t}. \quad (3)$$

Модули  $\lambda_i$  и  $G_i$  при  $i = 0, 1$ , а также  $\alpha$  и  $\beta$  могут принимать различные значения в матрице и во включении.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^*]. \quad (4)$$

В постановку задачи также входят условия на бесконечности

$$\sigma_M|_{\infty} = \sigma^{\infty}, \quad (5)$$

а также условия непрерывности вектора перемещений  $u$  и вектора нормальных напряжений  $N \cdot \sigma$  на границе матрицы и включения

$$\begin{aligned} N \cdot \sigma_M|_{\Gamma} &= N \cdot \sigma_B|_{\Gamma}, \\ u_M|_{\Gamma} &= u_B|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Использованы следующие обозначения:  $u$  – вектор перемещений,  $\sigma$  – тензор напряжений,  $\varepsilon$  – тензор деформаций,  $I_1(\cdot)$  – первый инвариант тензора,  $I$  – единичный тензор,  $N$  – нормаль к границе,  $\rho$  – плотность,  $\vec{f}$  – вектор объёмных сил (при решении задачи считался равным нулю).

## 2. Метод решения

Так как определяющие соотношения в задаче заданы в виде интегралов свёртки по времени, можно эффективно воспользоваться методом интегральных преобразований Лапласа [2]. Для внешней нагрузки и ядер релаксации используем их функции в изображениях. Для решения задачи в изображениях вводится в рассмотрение комплексная переменная  $z = x + iy = r e^{i\vartheta}$  и применяется метод Колосова-Мухелишвили. Это универсальный метод решения задач такого рода [9, 10, 11, 12, 13, 14]. При его применении напряжения и перемещения выражаются через комплексные потенциалы – аналитические функции  $\varphi_M(z)$ ,  $\psi_M(z)$  для матрицы и  $\varphi_B(z)$ ,  $\psi_B(z)$  для включения. Условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных напряжений на границе матрицы и включения могут быть выражены через комплексные потенциалы следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_M(z) + z \overline{\varphi'_M(z)} + \overline{\psi_M(z)} \Big|_{\Gamma} &= \varphi_B(z) + z \overline{\varphi'_B(z)} + \overline{\psi_B(z)} \Big|_{\Gamma}, \\ \frac{1}{2G_M} \left[ \varkappa_M \varphi_M(z) - z \overline{\varphi'_M(z)} - \overline{\psi_M(z)} \right] \Big|_{\Gamma} &= \frac{1}{2G_B} \left[ \varkappa_B \varphi_B(z) - z \overline{\varphi'_B(z)} - \overline{\psi_B(z)} \right] \Big|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\varkappa_M = \frac{\lambda_M + 3G_M}{\lambda_M + G_M}, \quad \varkappa_B = \frac{\lambda_B + 3G_B}{\lambda_B + G_B}. \quad (8)$$

Комплексные потенциалы определяются в виде рядов Лорана по степеням  $z$ . Поскольку напряжения должны быть ограниченными функциями, и они выражаются через комплексные потенциалы, то для потенциалов включения берутся положительные степени, а для матрицы отрицательные:

$$\begin{aligned}\varphi_M(z) &= \frac{p}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^{-k}, & \psi_M(z) &= -\frac{p}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} b_k z^{-k}, \\ \varphi_B(z) &= \frac{p}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, & \psi_B(z) &= -\frac{p}{2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь  $p$  – внешняя горизонтальная растягивающая нагрузка на бесконечности.

Подставляя потенциалы, представленные в виде рядов (9), в граничные условия, получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения выражений для коэффициентов рядов через нагрузки и ядра релаксации. Большинство коэффициентов получается нулевыми. Так как граничные условия вполне определяют напряжённое состояние тела, а смещения определяются с точностью до жёсткого перемещения, зафиксируем величины  $\varphi_M(0) = 0$ ,  $\psi_M(0) = 0$ ,  $\varphi_B(0) = 0$ ,  $\psi_B(0) = 0$  и, кроме того, мнимые части величин  $\varphi'_M(0) = 0$ ,  $\varphi'_B(0) = 0$  [7]. Принимая радиус включения равным 1, и из условий на бесконечности  $a_{-1} = 1$ ,  $b_{-1} = 1$ , имеем выражения для ненулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{2(G_M - G_B)}{\varkappa_M G_B + G_M}, \\ b_1 &= \frac{(1 - \varkappa_B) G_M - (1 - \varkappa_M) G_B}{(1 - \varkappa_B) G_M - 2G_B}, \\ b_3 &= -\frac{G_M - G_B}{\varkappa_M G_B + G_M}, \\ c_1 &= -\frac{(1 + \varkappa_M) G_B}{(1 - \varkappa_B) G_M - 2G_B}, \\ d_1 &= \frac{(1 + \varkappa_M) G_B}{\varkappa_M G_B + G_M}.\end{aligned}\tag{10}$$

Отметим, что можно ограничиться в суммах (9) конечным числом слагаемых до  $k = 3$  включительно без потери точности, поскольку коэффициенты при старших степенях  $z$  будут нулевыми.

Выражения, связывающие потенциалы с напряжениями и перемещениями впервые получены Г.В. Колосовым [6, 7, 8]. Запишем их в полярной системе координат.

Для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^M + \sigma_{\vartheta\vartheta}^M &= 2 \left[ \varphi'_M(z) + \overline{\varphi'_M(z)} \right], & \sigma_{\vartheta\vartheta}^M - \sigma_{rr}^M + 2i\sigma_{r\vartheta}^M &= 2 \left[ \bar{z}\varphi''_M(z) + \psi'_M(z) \right] e^{2i\vartheta}, \\ \sigma_{rr}^B + \sigma_{\vartheta\vartheta}^B &= 2 \left[ \varphi'_B(z) + \overline{\varphi'_B(z)} \right], & \sigma_{\vartheta\vartheta}^B - \sigma_{rr}^B + 2i\sigma_{r\vartheta}^B &= 2 \left[ \bar{z}\varphi''_B(z) + \psi'_B(z) \right] e^{2i\vartheta}.\end{aligned}\tag{11}$$

Для перемещений:

$$\begin{aligned} u_r^M + iu_\vartheta^M &= \frac{1}{2G_M} \left[ \varkappa_M \varphi_M(z) - z \overline{\varphi'_M(z)} - \overline{\psi_M(z)} \right] e^{-i\vartheta}, \\ u_r^B + iu_\vartheta^B &= \frac{1}{2G_B} \left[ \varkappa_B \varphi_B(z) - z \overline{\varphi'_B(z)} - \overline{\psi_B(z)} \right] e^{-i\vartheta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Все приведённые выше выражения даны в изображениях.

Подставим в эти формулы выражения для потенциалов (9) и получим выражения в изображениях для напряжений и перемещений.

Для матрицы:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^M &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{b_1}{r^2} + \left( 1 - \frac{2a_1}{r^2} - \frac{3b_3}{r^4} \right) \cos 2\vartheta \right], \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^M &= \frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{b_1}{r^2} - \left( 1 - \frac{3b_3}{r^4} \right) \cos 2\vartheta \right], \\ \sigma_{r\vartheta}^M &= -\frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{a_1}{r^2} + \frac{3b_3}{r^4} \sin 2\vartheta \right], \\ u_r^M &= \frac{p}{8G_M r} \left( (\varkappa_M - 1) r^2 + 2b_1 + \left[ a_1 (\varkappa_M + 1) + 2r^2 + \frac{2b_3}{r^2} \right] \cos 2\vartheta \right), \\ u_\vartheta^M &= -\frac{p}{8G_M r} \left( a_1 (\varkappa_M - 1) + 2r^2 - \frac{2b_3}{r^2} \right) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad (13)$$

Для включения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^B &= \frac{p}{2} [c_1 + d_1 \cos 2\vartheta], \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^B &= \frac{p}{2} [c_1 - d_1 \cos 2\vartheta], \\ \sigma_{r\vartheta}^B &= -\frac{p}{2} d_1 \sin 2\vartheta, \\ u_r^B &= \frac{pr}{8G_B} [c_1 (\varkappa_B - 1) + 2d_1 \cos 2\vartheta], \\ u_\vartheta^B &= -\frac{pr}{4G_B} d_1 \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем решение в оригиналах. Учитывая громоздкость этих выражений, ограничимся только численными результатами.

### 3. Результаты расчётов

Для решения задачи было разработано программное обеспечение в среде системы компьютерной алгебры Maple [16].

Были выполнены расчёты при следующих значениях вязкоупругих констант:  $\alpha_M = \beta_M = \alpha_B = \beta_B$ ,  $\lambda_0^M/G_0^M = 1.5$ ,  $\lambda_1^M/G_0^M = 1.4$ ,  $G_1^M/G_0^M = 0.4$ ,  $\lambda_0^B/G_0^M = 15$ ,

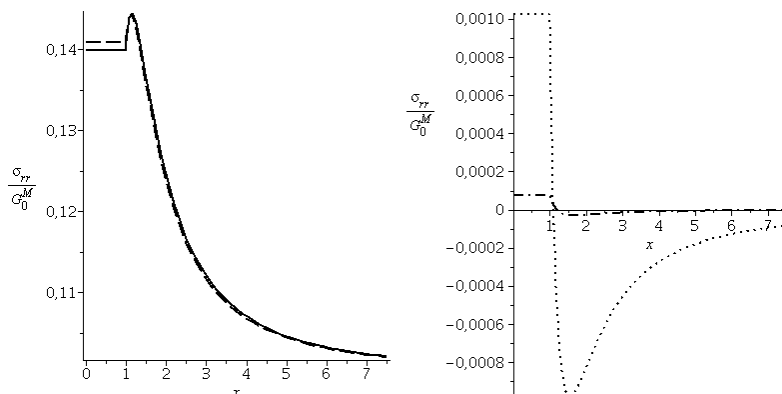


Рис. 2: Распределение напряжений  $\sigma_{rr}$  вдоль оси  $x$

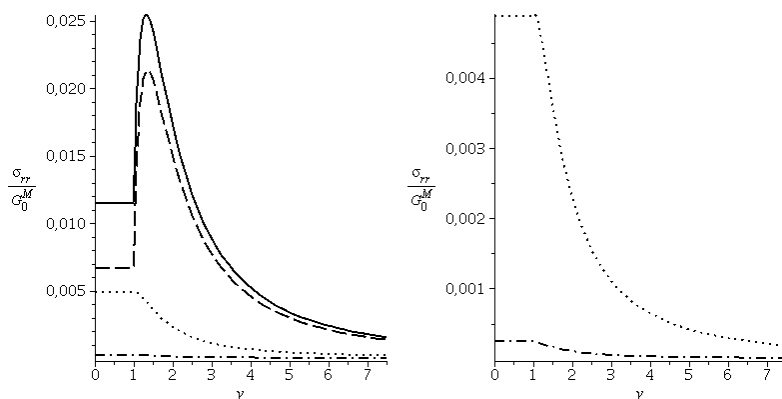


Рис. 3: Распределение напряжений  $\sigma_{rr}$  вдоль оси  $y$

$\lambda_1^B/G_0^M = 14$ ,  $G_0^B/G_0^M = 10$ ,  $G_1^B/G_0^M = 4$ . В данном случае включение более жёсткое, чем матрица. На бесконечности в момент  $t = 0$  прикладывается одноосная растягивающая нагрузка величины  $0.1G_0^M$  вдоль оси  $x$ , и в момент  $t = 5/\alpha_M$  мгновенно снимается, то есть задаётся соотношением  $p(t) = 0.1G_0^M (h(t) - h(t - 5/\alpha_M))$ . Здесь  $h(t)$  – функция Хевисайда.

На рис. 2–3 показано распределение напряжений  $\sigma_{rr}$  вдоль координатных осей. На рис. 4 показано распределение напряжений  $\sigma_{rr}$  вдоль границы между включением и матрицей. Сплошная линия соответствует распределению в момент  $t = 0$ , штриховая – в момент  $t = 5/\alpha_M$  до снятия нагрузок, пунктирная – в момент  $t = 5/\alpha_M$  после снятия нагрузок, штрихпунктирная – в момент  $t = 10/\alpha_M$ . На рис. 5 показана форма включения в различные моменты времени. В момент  $t = 5/\alpha_M$  до снятия нагрузок изменение формы практически прекращается, а в момент  $t = 10/\alpha_M$  включение почти возвращается в недеформированное состояние. На этом рисунке перемещения по осям увеличены в 100 раз для достижения большей наглядности.

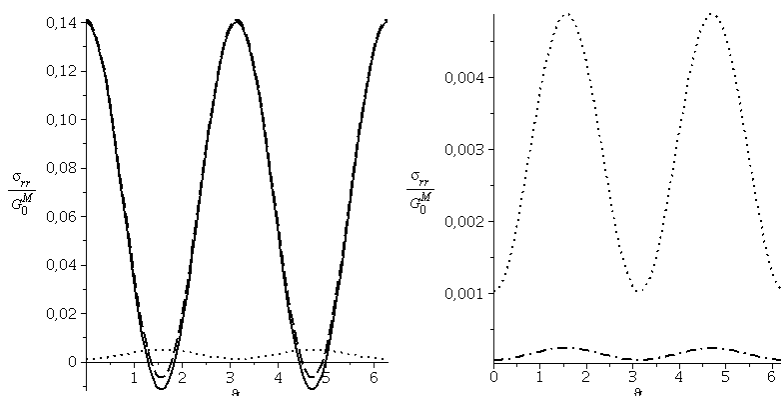


Рис. 4: Распределение напряжений  $\sigma_{rr}$  вдоль границы между включением и матрицей

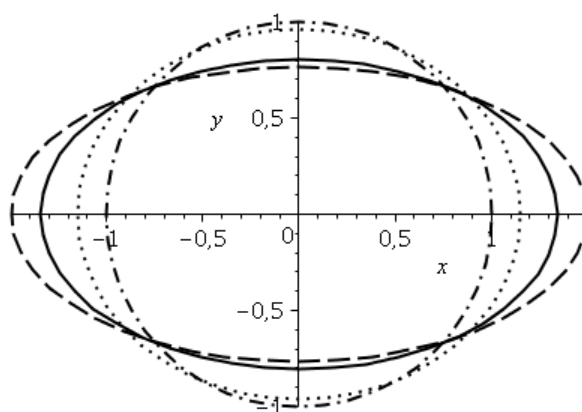


Рис. 5: Форма включения в различные моменты времени

### Заключение

Разработаны метод, алгоритм и программное обеспечение для аналитического решения плоской задачи о квазистатическом деформировании бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при заданных напряжениях на бесконечности в рамках линейной теории вязкоупругости при малых деформациях. Исследованы распределение напряжений и форма включения в различные моменты времени. Было замечено, что напряжение со временем уменьшается по абсолютной величине и изменение формы замедляется, асимптотически приближаясь к квазиравновесному состоянию. Такой эффект называется ограниченной ползучестью и его появление связано с выбором модели вязкоупругой среды. Напряжённо-деформированное состояние включения однородно, что согласуется с результатами решения задачи об упругом включении в упругой сре-

де [15]. Напряжения в матрице при увеличении расстояния от включения сначала резко возрастают и достигают своих максимальных значений в непосредственной близости от включения, а затем уменьшаются, асимптотически стремясь к значениям нагрузок на бесконечности. После снятия нагрузок в теле остаются остаточные напряжения и деформации, которые со временем уменьшаются по абсолютной величине до нуля, возвращая тело в исходное недеформированное состояние. Результаты решения этой задачи могут быть использованы при расчёте на прочность композиционных материалов.

### Список литературы

- [1] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
- [2] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
- [3] Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. – М.: Машиностроение, 1983. – 239 с.
- [4] Мошев В.В. и др. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. – Екатеринбург: УрО РАН, 1997. – 508 с.
- [5] Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о равновесии бесконечно протяжённого упругого тела с круговым упругим включением средствами компьютерной алгебры // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Третья Российская школа-конференция для молодых учёных: Тезисы докладов. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. – С. 68.
- [6] Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. – Юрьев: Маттисен, 1908. 187 с.
- [7] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
- [8] Кошелев А.И., Нарбут М.А. Механика деформируемого твёрдого тела. – СПб.: СПбГУ, 2002. – 287с.
- [9] Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. – М.: МАИК Наука, Физматлит, 1999. – 224 с.
- [10] Зингерман К.М., Левин В.А. Последовательное образование двух неравных эллиптических отверстий в теле из вязкоупругого несжимаемого материала. Конечные деформации // Известия АН. Механика твёрдого тела. – 1999. – № 4. – С. 162–169.
- [11] Зингерман К.М., Левин В.А. Перераспределение конечных упругих деформаций после образования включений. Приближенное аналитическое решение // Прикладная математика и механика. – 2009. Т. 73, вып. 6. – С. 983–1001.



- 
- [12] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
- [13] Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 887 с.
- [14] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. – М.: Наука, 1994. – 560 с.
- [15] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: ИЛ, 1963. – 248 с.
- [16] Матросов А.В. Марле 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.